



FORMULAÇÃO DA TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS PARA CALCULAR CARGAS DE BIFURCAÇÃO LATERAL-DISTORCIONAL EM VIGAS MISTAS AÇO-BETÃO

David Henriques^a, Rodrigo Gonçalves^b e Dinar Camotim^c

^a *TECNORÉM, Engenharia e Construções, S.A.,*

Estrada Nacional 113, Moinho da Areia, 2490-444 Ourém

^b *ICIST, CERIS, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia,*

Universidade Nova de Lisboa, 2829-516 Caparica

^c *ICIST, CERIS, DECivil, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa,*

Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa

Resumo. Apresenta-se um elemento finito baseado na Teoria Generalizada de Vigas (ou GBT, *Generalized Beam Theory*) para calcular, com eficiência computacional e precisão, cargas de bifurcação laterais-distorsionais em vigas mistas aço-betão. A determinação das cargas de bifurcação é realizada em duas etapas: (i) uma análise de pré-encurvadura, que contabiliza os efeitos de *shear lag* e da fendilhação do betão, e (ii) uma análise linear de estabilidade, baseada nas tensões de pré-encurvadura, considerando a deformação local (tipo placa) da alma, a rotação do banzo inferior e a distorção da secção mista. Para demonstrar as potencialidades do elemento proposto, apresentam-se e discutem-se vários exemplos ilustrativos.

1. Introdução

Conforme é sabido, as vigas mistas aço-betão constituídas por perfis de aço esbeltos, sujeitas a momento negativo, podem instabilizar num modo distorcional, envolvendo o empenamento e movimento lateral do banzo inferior e a flexão transversal da secção, conforme mostra a Fig. 1. No Eurocódigo 4 (EC4, [1]) é referido que a rigidez de distorção da secção pode ser calculada com base numa “estrutura em U invertido”, mas a determinação do momento crítico não é uma tarefa simples, dado que requer a contabilização de vários outros efeitos, como *shear lag*, a fendilhação, a fluência, o faseamento construtivo e o diagrama de momentos na viga.

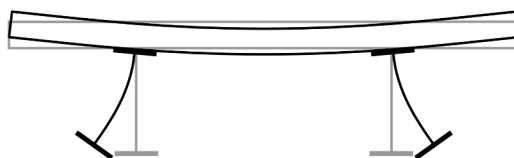


Fig. 1: Encurvadura distorcional de vigas mistas.

A determinação de momentos críticos em vigas mistas tem sido um assunto abordado por vários investigadores. A título de exemplo, menciona-se (i) o elemento finito (EF) de barra de Bradford e Gao [2], que considera que o banzo superior se encontra fixo e que o banzo inferior pode deslocar-se lateralmente e rodar por torção, independentemente, originando deslocamentos cúbicos na alma, e (ii) soluções baseadas na teoria de vigas sob fundação elástica [3,4], as quais dependem de coeficientes que são fornecidos em tabelas ou gráficos.

A Teoria Generalizada de Vigas (GBT, *Generalized Beam Theory*) é uma teoria de barras prismáticas de parede fina que considera, de uma forma extremamente eficiente, a deformação da secção transversal no seu plano e para fora deste (empenamento), através da consideração de “modos de deformação” da secção. A GBT foi originalmente proposta por Schardt [5] e consideravelmente desenvolvida desde então, particularmente na última década. Hoje em dia é vista como uma ferramenta numérica muito eficiente e valiosa para analisar o comportamento linear, de encurvadura, de pós-encurvadura, de vibração e dinâmico de barras de parede fina com secção deformável (ver, por exemplo, [6,7]).

A GBT foi já aplicada, com sucesso, ao estudo do comportamento estrutural de vigas mistas aço-betão. Em [8] demonstrou-se que a GBT pode lidar, com bastante eficiência e precisão, efeitos complexos como a distorção da secção, a presença de diafragmas transversais, *shear lag* e a flexibilidade da conexão de corte. No referido artigo apresentaram-se (i) vários exemplos ilustrativos, referentes a análises lineares elastoestáticas e de vibração livre não-amortecida, e (ii) soluções semi-analíticas para a encurvadura distorcional de vigas simplesmente apoiadas e sujeitas a momento negativo uniforme. Mais recentemente, em [9], apresentou-se um EF fisicamente não-linear baseado na GBT, computacionalmente muito eficiente, capaz de capturar o comportamento fisicamente não-linear do aço e do betão, até ao colapso, com grande precisão. Este EF incorpora os efeitos da fendilhação e do esmagamento do betão, *shear lag* e plasticidade do aço. Finalmente, em [10], foi desenvolvido o EF que se apresenta no presente artigo, que permite determinar cargas de bifurcação locais e distorcionais de vigas mistas sujeitas a momento fletor arbitrário (análise linear de estabilidade). A análise é efetuada em dois passos: (i) uma análise de pré-encurvadura, geometricamente linear, que inclui os efeitos de *shear lag* e fendilhação do betão, para determinar as tensões instaladas, e (ii) uma análise de bifurcação, tem em conta a distorção da secção e a deformação local (tipo placa) do perfil de aço. Para ilustrar a aplicação e as potencialidades do EF proposto, são apresentados e discutidos vários exemplos numéricos. Para efeitos de comparação e validação, fornecem-se resultados obtidos com modelos de faixas finitas e de EF de casca.

2. Formulação da GBT para a análise de encurvadura de vigas mistas

2.1 Relações fundamentais

A notação utilizada no presente artigo segue a que foi introduzida em [11,12], embora os termos geometricamente não-lineares sejam simplificados de acordo com os pressupostos de uma análise linear de estabilidade. Os parâmetros associados ao betão, ao perfil em I e à armadura são identificados pelos índices c , a e s , respetivamente.

Considera-se que a secção transversal é do tipo da representada na Fig. 2(a), combinando uma laje de betão armado e uma viga em I de aço. A Fig. 2(b) exhibe a linha média das paredes e os eixos locais (x define a direcção longitudinal), que constituem a base da descrição cinemática GBT. A secção transversal é subdividida nas seguintes paredes: (i) dois banzos e uma alma, para o perfil I, e (ii) dois banzos de betão armado, de larguras b_{c1} e b_{c2} , englobando as camadas de armadura existentes.

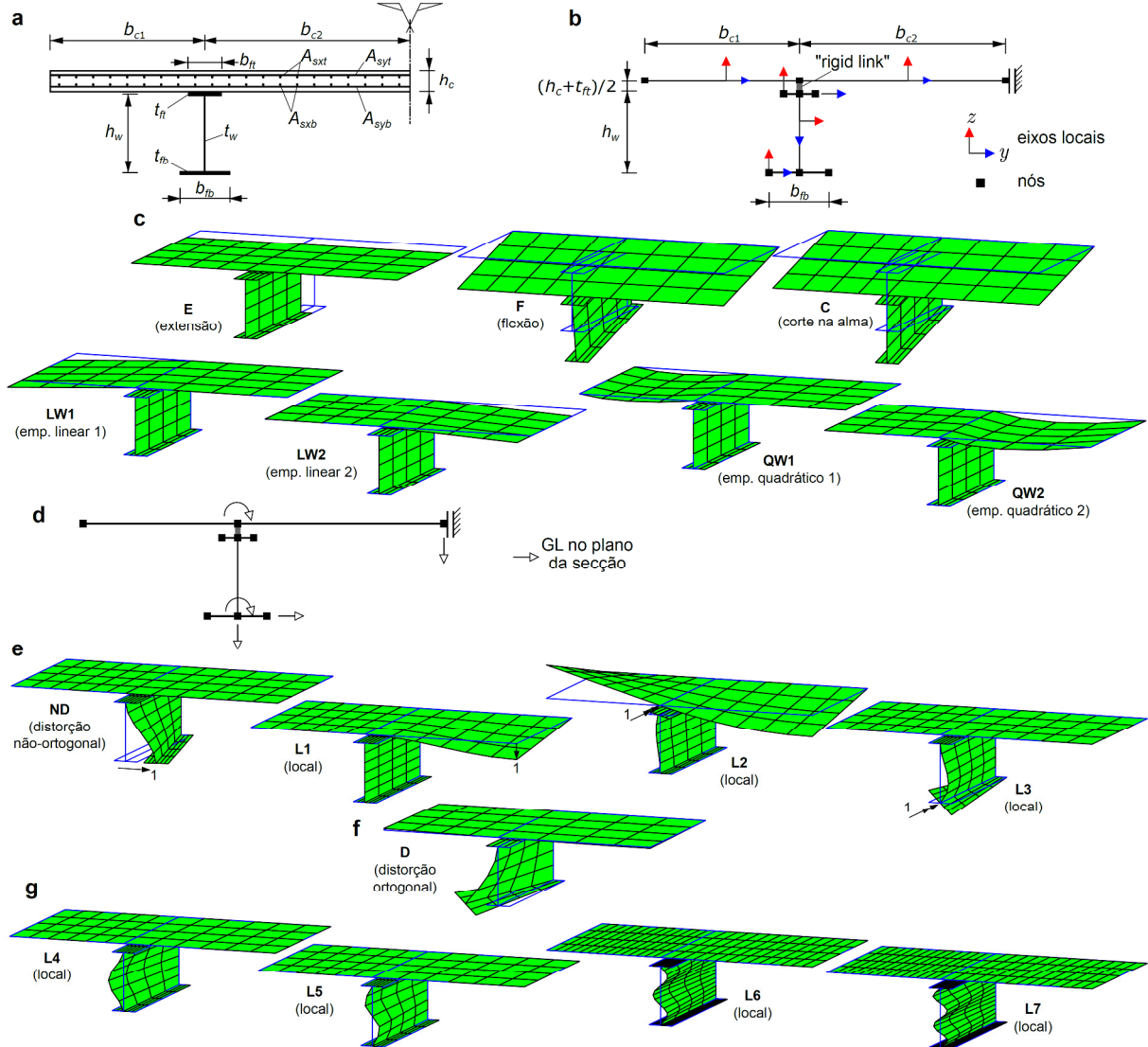


Fig. 2: (a) Geometria da secção, (b) discretização da secção, (c) modos de deformação para a análise de pré-encurvadura, (d) GL da secção para a análise de bifurcação, (e) modos de deformação para a análise de bifurcação, (f) modo distorcional ortogonal e (g) modos locais na alma.

Utilizando os eixos locais e a hipótese de Kirchhoff (lajes finas), o campo de deslocamentos da GBT para cada parede é dado pelo vetor \mathbf{U} , da forma

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = (\bar{\Xi}_U(y) + z\Xi_U(y)) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(x) \\ \boldsymbol{\varphi}_{,x}(x) \end{bmatrix}, \quad \bar{\Xi}_U = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{u}}^T \\ \bar{\mathbf{v}}^T & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{w}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \Xi_U = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{w}}^T \\ \bar{\mathbf{w}}_{,y}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde as vírgulas indicam uma derivação, $\boldsymbol{\varphi}(x)$ é um vetor-coluna contendo as funções de amplitude dos $k = 1, \dots, D$ modos de deformação (D é o número de modos) e $\bar{\mathbf{u}}(y)$, $\bar{\mathbf{v}}(y)$, $\bar{\mathbf{w}}(y)$ são vetores-coluna contendo as funções de deslocamento da linha média segundo x , y , z , res-

petivamente, para cada modo de deformação. A determinação destas funções para o presente caso é explicada de seguida. Para secções arbitrárias, podem ser determinadas através do programa GBTUL, disponível em www.civil.ist.utl.pt/gbt.

As deformações de Green-Lagrange \mathbf{E} são obtidas a partir do campo de deslocamentos \mathbf{U} . As componentes não-nulas são subdivididas em termos de membrana (M) e flexão (F), sendo as segundas sempre consideradas pequenas. Assume-se um estado plano de tensão e o trabalho virtual é escrito em termos de \mathbf{E} e do segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} . Utilizando uma notação do tipo Voigt e os eixos locais de cada parede, tem-se

$$\mathbf{E}^T = [E_{xx} \ E_{yy} \ 2E_{xy}], \quad \mathbf{S}^T = [S_{xx} \ S_{yy} \ S_{xy}]. \quad (2)$$

O EF foi implementado em MATLAB [13].

2.2 Análise de pré-encurvadura

A análise pré-encurvadura segue a metodologia utilizada em [9], muito embora a fendilhação do betão seja a única fonte de não-linearidade física considerada. Consideram-se pequenas deformações, pelo que $\mathbf{E} \approx \boldsymbol{\varepsilon}$. Assume-se que a secção transversal é indeformável no seu próprio plano ($\varepsilon_{yy} = S_{yy} = \varepsilon_{xy}^F = S_{xy}^F = 0$) e que a hipótese de Vlasov é válida nos banzos do perfil ($\varepsilon_{xy}^M = 0$). Com estas hipóteses, os modos de deformação relevantes são os exibidos na Fig. 2(c): extensão axial (E), flexão pura (F) (calculada assumindo o betão não fendilhado), corte uniforme na alma (C) e modos de empenamento lineares/quadráticos (LW/QW) em cada parede de betão, para capturar o efeito de *shear lag* [9]. Note-se que, mesmo que não atue um esforço axial, o modo E deve ser incluído nas análises, para capturar o deslocamento do eixo neutro devido à fendilhação e *shear lag*. Deve salientar-se que a hipótese $S_{yy}^M = 0$ implica que os respetivos efeitos instabilizantes não são considerados na análise de bifurcação. Estes efeitos podem ser importantes perto de cargas concentradas, pelo que se assume que os respetivos modos de instabilidade se encontram impedidos, *e.g.*, por reforços transversais.

As únicas componentes de tensão não-nulas são S_{xx}^M, S_{xx}^F e S_{xy}^M (esta última nula nos banzos do perfil) e, portanto, a matriz constitutiva tangente é dada por

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} E_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_t \end{bmatrix}, \quad (3)$$

onde E_t e G_t são os módulos tangentes uniaxial e de distorção, respetivamente. Para o aço (em perfil e armadura) adota-se uma relação constitutiva elástica linear, com $G_t = 0$ para a armadura longitudinal. A armadura transversal não é contabilizada na análise de pré-encurvadura, dado que os modos de deformação considerados não introduzem deformação transversal. Quanto ao comportamento do betão, adota-se uma versão simplificada da lei proposta em [9], caracterizada por uma resistência à tração nula e um comportamento linear à compressão. Tem-se assim $E_t = E_c$ para $\varepsilon_{xx} < 0$, caso contrário $E_t = 0$, e $G_t = \beta G_c$, onde $\beta \leq 1$ é um fator de redução para ter em conta o efeito da fendilhação.

Utiliza-se uma interpolação padrão das funções de amplitude, $\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{\Psi}(x)\mathbf{d}$, onde a matriz $\boldsymbol{\Psi}$ contém as funções de interpolação e o vetor-coluna \mathbf{d} agrupa as incógnitas (valores nodais das funções de amplitude). Utilizam-se (i) polinómios cúbicos de Hermite para os modos F e C e (ii) polinómios quadráticos de Lagrange para os modos E, LW e QW (os que envolvem apenas empenamento). Esta interpolação conduz a um EF com 23 graus de liberdade (GL). No caso de secções simétricas, os modos de *shear lag* podem ser agrupados em pares (LW1+LW2 e QW1+QW2), diminuindo o número de GL para apenas 17.

O vetor das forças desequilibradas \mathbf{g} , a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_t e o vetor de forças incremental $\Delta \mathbf{f}$ são obtidos a partir da integração numérica das seguintes expressões

$$\mathbf{g} = \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \Xi_\varepsilon^T \mathbf{S} dV - \int_\Omega \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^T \bar{\Xi}_U^T \bar{\mathbf{q}} d\Omega, \quad \mathbf{K}_t = \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \Xi_\varepsilon^T \mathbf{C}_t \Xi_\varepsilon \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} dV, \quad (4)$$

$$\Delta \mathbf{f} = \int_\Omega \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^T \bar{\Xi}_U^T \Delta \bar{\mathbf{q}} d\Omega,$$

onde V é o volume do elemento, Ξ_ε é o operador deslocamento-deformação modal e $\bar{\mathbf{q}}$ é o vetor das forças que atuam ao longo da superfície média das paredes Ω (para simplificar, não são consideradas forças de volume). Realiza-se uma integração numérica com quadratura de Gauss, utilizando 3 pontos em x e um número de pontos em y relacionado com a natureza dos modos de deformação incluídos na análise de bifurcação (ver Secção 2.3), em cada parede. Segundo z utiliza-se um número ímpar de pontos, para recuperar as tensões na superfície média: 1 ponto para a armadura, 3 pontos para o perfil e 5 pontos para a laje, para capturar adequadamente o efeito da fendilhação. Recorre-se ao método de Newton-Raphson para um único passo de carga, que define o carregamento de referência para a análise de bifurcação.

2.3 Análise de bifurcação

Para a análise de bifurcação, assume-se que $E_{yy}^M = S_{yy}^M = 0$, mas as restantes componentes são não-nulas, devido à deformação da secção no seu plano (local e distorcional). Para ter em conta estes efeitos adicionam-se os modos correspondentes aos graus de liberdade da Fig. 2(d). No entanto, como o deslocamento vertical da secção já é tido em conta pelo modo C, obtêm-se apenas os quatro modos independentes da Fig. 2(e) – note-se que, no modo L2, liberta-se o deslocamento associado ao modo L1. Não se efetua uma ortogonalização destes modos, para simplificar a imposição da compatibilidade entre elementos com secções transversais diferentes (ver exemplos). Contudo, recorre-se a um pós-processamento dos resultados para obter a participação modal em termos dos modos ortogonalizados mais relevantes, em particular do modo distorcional ortogonal representado na Fig. 2(f), que corresponde a uma combinação dos modos ND, L2 e L3. Finalmente, para ter em conta a deformação local da alma, são adicionados os modos polinomiais L4-L7 da Fig. 2(g).

Para o aço adota-se uma lei constitutiva elástica linear, o que permite desacoplar os termos de membrana e flexão e integrar analiticamente as expressões na direção da espessura, conduzindo a uma relação constitutiva escrita em termos de esforços. Para o perfil e armadura longitudinal, as matrizes constitutivas são dadas por

$$\bar{\mathbf{C}}_{ta}^M = \begin{bmatrix} E_a t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_a t \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}}_{ta}^F = \frac{E_a t^3}{12(1-\nu_a^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_a & 0 \\ \nu_a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_a}{2} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}}_{tsx}^M = \begin{bmatrix} E_s A_{sx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}}_{tsx}^F = \mathbf{0}. \quad (5)$$

A armadura transversal é diretamente incluída na laje de betão, conforme a seguir explicado.

Para o betão despreza-se o efeito de Poisson e assume-se que (i) E_{tcx} é constante na espessura e igual ao valor para $z = 0$ e que (ii) β é constante. Nestas condições, a integração na espessura fornece

$$\bar{\mathbf{C}}_{tc}^M = \begin{bmatrix} E_{tcx} h_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G_c h_c \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}}_{tc}^F = \begin{bmatrix} \frac{E_{tcx} h_c^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & D_{fey} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta G_c h_c^3}{12} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

onde $E_{tcx} = 0$ se $\varepsilon_{xx} > 0$ da análise de pré-encurvadura e D_{fcy} é a rigidez de flexão da laje na direção transversal, a qual inclui a contribuição da armadura transversal.

Os termos geometricamente não-lineares são também integrados na espessura,

$$\begin{aligned} \int \Delta E_{xx} \lambda S_{xx} dz &= \delta \Phi_{,x}^T (\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}^T) t \lambda S_{xx}^M \Delta \Phi_{,x}, \\ \int 2 \Delta E_{xy} \lambda S_{xy} dz &= (\delta \Phi_{,x}^T \bar{\mathbf{w}}_{,y} \bar{\mathbf{w}}^T \Delta \Phi_{,x} + \delta \Phi_{,x}^T \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}_{,y}^T \Delta \Phi) t \lambda S_{xy}^M, \end{aligned} \quad (7)$$

onde Δ indica uma variação incremental (para a trajetória de pós-encurvadura) e λ é o parâmetro de carga. Adota-se o mesmo esquema de interpolação da análise de pré-encurvadura e o problema discretizado assume a forma clássica $(\mathbf{K}_t + \lambda \mathbf{G}) \Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}$, com

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t &= \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \left((\bar{\Xi}_{\varepsilon}^M)^T \bar{\mathbf{C}}_t^M \bar{\Xi}_{\varepsilon}^M + (\bar{\Xi}_{\varepsilon}^B)^T \bar{\mathbf{C}}_t^B \bar{\Xi}_{\varepsilon}^B \right) \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} d\Omega, \\ \mathbf{G} &= \int_{\Omega} t S_{xx}^M \Psi_{,x}^T (\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}^T) \Psi_{,x} d\Omega + \int_{\Omega} t S_{xy}^M (\Psi^T \bar{\mathbf{w}}_{,y} \bar{\mathbf{w}}^T \Psi_{,x} + \Psi_{,x}^T \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}_{,y}^T \Psi) d\Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

A integração numérica é efetuada com 3 pontos segundo x e o número de pontos segundo y necessário para integrar $S_{xx}^M \bar{\mathbf{w}}_k^2$ em cada parede.

3. Exemplos numéricos

3.1 Viga simplesmente apoiada sujeita à flexão pura

No primeiro exemplo analisa-se a viga simplesmente apoiada da Fig. 3. Consideram-se dois valores para h_w e o vão L é variado entre 1 e 17 m. Admite-se que a armadura se concentra em $z = 0$ e que o betão se encontra não-fendilhado na direção transversal (despreza-se a contribuição da armadura transversal).

Nas análises com o EF proposto, como não ocorrem tensões de corte, não se incluem os modos C, LW e QW. Utiliza-se uma discretização uniforme com 10 elementos. Neste caso a solução exata do problema é dada por funções de amplitude sinusoidais e portanto pode utilizar-se o programa de faixas finitas CUFSM [14], para efeitos de comparação.

O gráfico superior da Fig. 3 representa o momento crítico (M_{cr}), em função de L , e os dois diagramas inferiores fornecem as participações modais da GBT (critério de energia de deformação). Além disso, mostram-se na figura quatro modos de instabilidade representativos. Em primeiro lugar, observa-se que os momentos críticos obtidos com a GBT estão em excelente concordância com os fornecidos pelo CUFSM, indicando que os modos de deformação selecionados são apropriados para o problema em consideração. Conforme seria de esperar, a encurvadura local é caracterizada por semi-comprimentos de onda muito pequenos, enquanto que a encurvadura distorcional está associada a maiores vãos, sendo crítico para vãos com interesse prático. Os diagramas de participação modal permitem concluir que a encurvadura local tem contribuições importantes dos modos L4 e L5, mas também de L3 e L6. Por outro lado, o modo de instabilidade distorcional corresponde essencialmente ao modo D, com uma participação muito pequena do modo L3, o que quer dizer que, neste caso particular, o modo D isolado é capaz de fornecer M_{cr} distorcionais muito precisos.

É ainda de referir que os resultados mostram que o aumento da altura da alma influencia significativamente o momento crítico local (como esperado), mas tem impacto reduzido no momento crítico distorcional, embora altere o valor de L correspondente à transição de modos com uma e duas semi-ondas longitudinais.

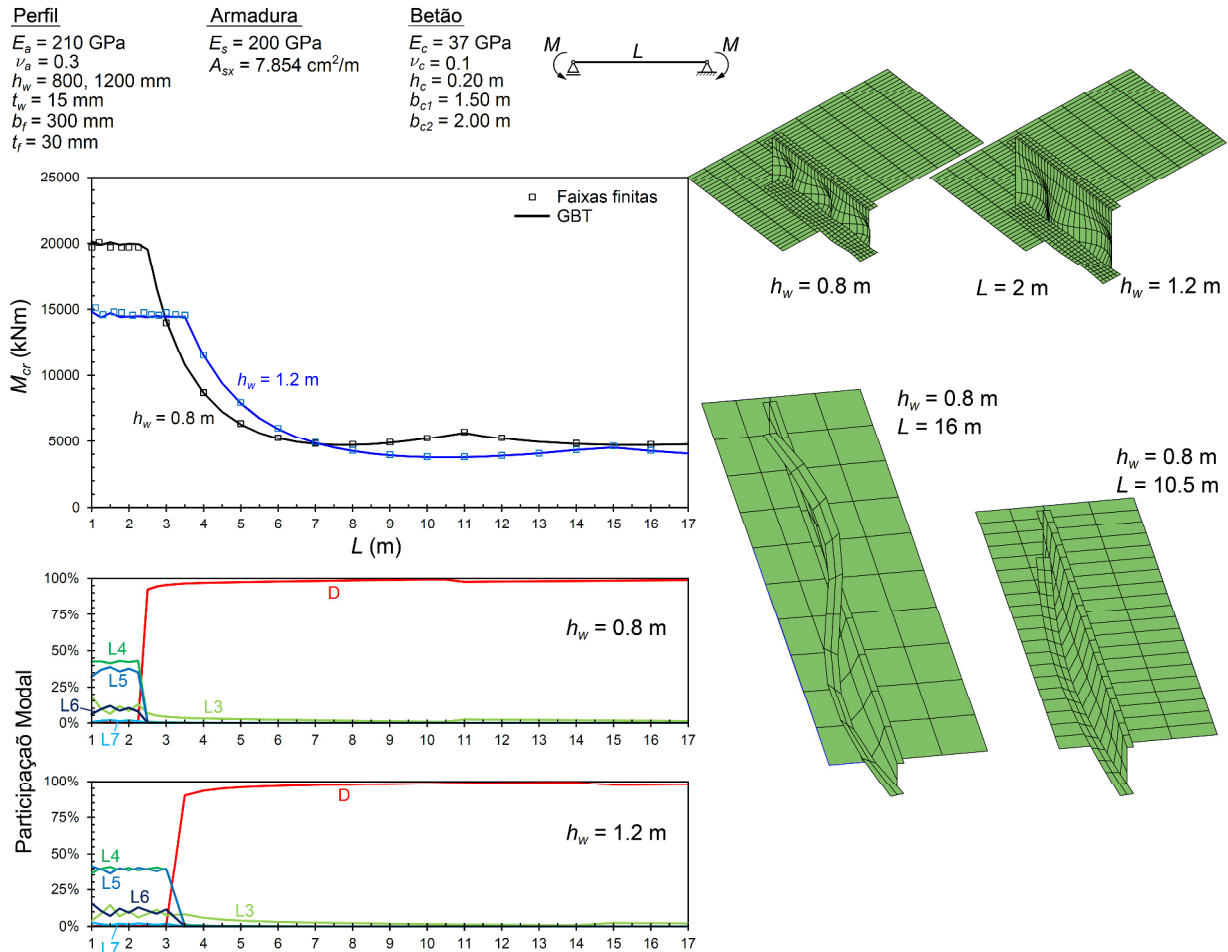


Fig. 3: Viga simplesmente apoiada sujeita à flexão pura.

3.2 Viga de dois vãos sujeita a uma carga uniformemente distribuída

Nesta seção analisa-se a viga da Fig. 4, adotando várias hipóteses. Consideram-se dois valores para a espessura da alma e, muito embora $t_w = 30 \text{ mm}$ não seja realista (a alma e os banzos possuem a mesma espessura), este valor foi considerado porque constitui um “caso limite”, em que a alma é muito pouco esbelta. Os três apoios restringem todos os deslocamentos no plano na secção transversal (incluindo os da laje de betão), mas permitem o empenamento.

Deve notar-se que este problema é significativamente mais complexo do que o anterior, uma vez que as tensões de pré-encurvatura variam rapidamente ao longo dos vãos e o modo de instabilidade é muito localizado, na zona do apoio intermédio.

Para efeitos de comparação, são fornecidos resultados obtidos com malhas refinadas de EF de casca MITC-4, utilizando o programa ADINA [15] (> 53000 GL).

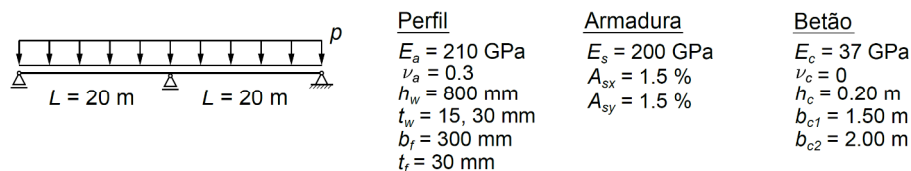


Fig. 4: Viga de dois vãos sujeita a uma carga uniformemente distribuída.

3.2.1 Análise não-fendilhada

Em primeiro lugar assume-se que o betão não se encontra fendilhado e despreza-se a contribuição da armadura. Nestas condições, o modelo de EF da GBT pode ser diretamente comparado com um modelo de EF de casca isotrópicos.

Os resultados são mostrados nas Figs. 5 ($t_w = 15$ mm) e 6 ($t_w = 30$ mm). Em cada caso, o gráfico do canto superior esquerdo mostra o valor da carga crítica (p_{cr}) em função do número de EF, obtido considerando (i) apenas S_{xx} e todos os modos de deformação, (ii) S_{xx} , S_{xy} e todos os modos de deformação, e (iii) S_{xx} e apenas o modo D (distorcional). Os resultados obtidos com o modelo de EF de casca também são representados nestes gráficos. Além disso, cada figura mostra (i) os valores de p_{cr} (tabelas) e as participações modais (os resultados da GBT correspondem a discretizações com 100 EF), e (ii) o modo de instabilidade (no caso da GBT mostra-se um único vão). Estes resultados permitem extrair as seguintes conclusões:

- (i) Os gráficos da esquerda mostram que 20-30 elementos já fornecem resultados satisfatórios. No entanto, estes níveis de discretização são naturalmente superiores aos do exemplo anterior, dado que o presente caso é mais complexo.
- (ii) Para $t_w = 15$ mm o modo crítico combina distorção com modos locais na alma, o que é algo inesperado tendo em conta que a alma não é particularmente esbelta.
- (iii) Uma observação das tabelas revela que os valores de p_{cr} obtidos com 100 EF da GBT são ligeiramente superiores aos obtidos com EF de casca. Contudo, para $t_w = 15$ mm, obtêm-se melhores resultados com S_{xx} e S_{xy} e, para $t_w = 30$ mm, com S_{xx} apenas. Este facto está relacionado com a natureza do modo: quando existe uma grande participação do modo D, a utilização exclusiva de S_{xx} conduz a melhores resultados – esta conclusão não é surpreendente, dado que o verdadeiro estado de tensão inclui também a componente S_{yy} , que não é contabilizada no EF proposto.
- (iv) Os modos de instabilidade confirmam a semelhança entre os resultados obtidos com o EF proposto e os modelos de EF de casca. São observadas algumas diferenças para $t_w = 15$ mm (a solução da GBT prevê uma deformação local mais pronunciada), mas verifica-se uma excelente concordância para $t_w = 30$ mm.
- (v) Se as análises de bifurcação forem realizadas com S_{xx} e o modo D apenas, a carga crítica é 13.6% ($t_w = 15$) e 30% ($t_w = 30$) superior ao valor obtido com o modelo de EF de casca. Este resultado mostra que, por vezes, não é aceitável considerar apenas a distorção da secção (é necessário incluir os modos L).

3.2.2 Secção não-uniforme

Neste exemplo demonstra-se que a formulação proposta permite considerar a variação da espessura das paredes. Para o efeito, considera-se que a espessura da alma é igual a 20 até 3 m do apoio intermédio, e de 15 mm nas restantes zonas. Tal como no caso anterior, assume-se que a laje não se encontra fendilhada e despreza-se a contribuição da armadura.

Com a GBT, a compatibilidade entre EF com diferentes espessuras encontra-se assegurada utilizando os modos da Fig. 2(c), (e), (g), com exceção do modo F, que é calculado usando a rigidez da secção transversal. Assim, para evitar a utilização de equações de constrangimento, o modo F é calculado para $t_w = 20$ mm em todos os elementos e a solução é posteriormente projetada no espaço dos modos ortogonais, como no caso do modo ND. Um total de 80 EF de igual comprimento são utilizados em cada vão.

Os resultados obtidos encontram-se representados na Fig. 7. Uma comparação entre estes resultados e os da Fig. 5 revela que a alteração da espessura conduziu a (i) um aumento da carga crítica de cerca de 30% e a (ii) uma alteração da natureza do modo de instabilidade, que agora é quase exclusivamente distorcional. Mais uma vez, os resultados obtidos com a GBT e o modelo de EF de casca estão em excelente acordo, particularmente ao considerar $S_{xy} = 0$ (o que confirma que o modo de instabilidade é essencialmente distorcional).

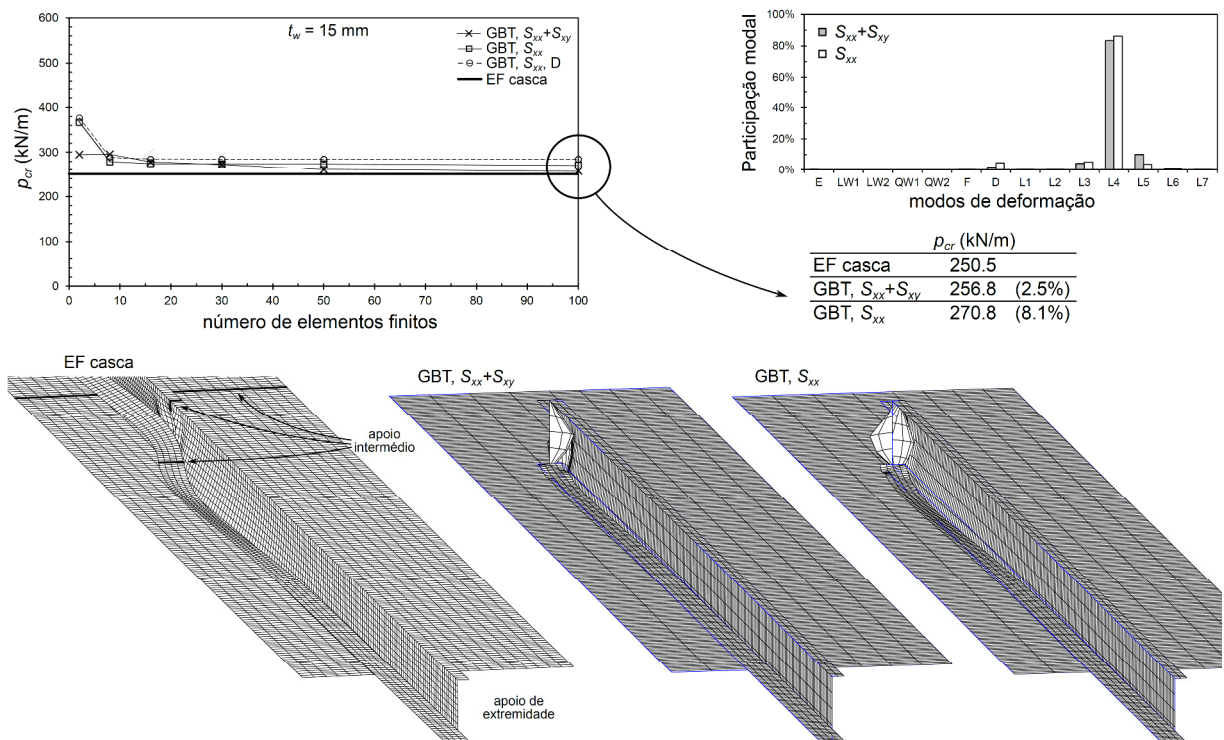


Fig. 5: Viga de dois vãos (laje não-fendilhada, $t_w = 15$ mm).

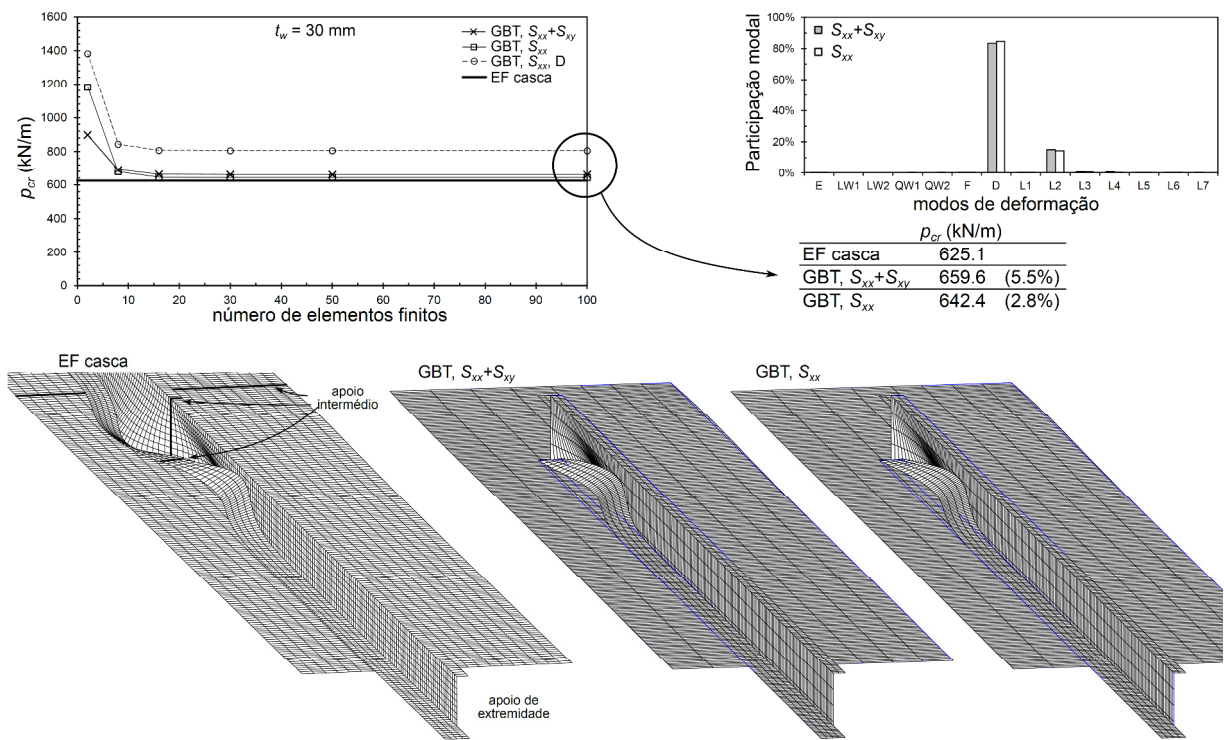


Fig. 6: Viga de dois vãos (laje não-fendilhada, $t_w = 30$ mm).

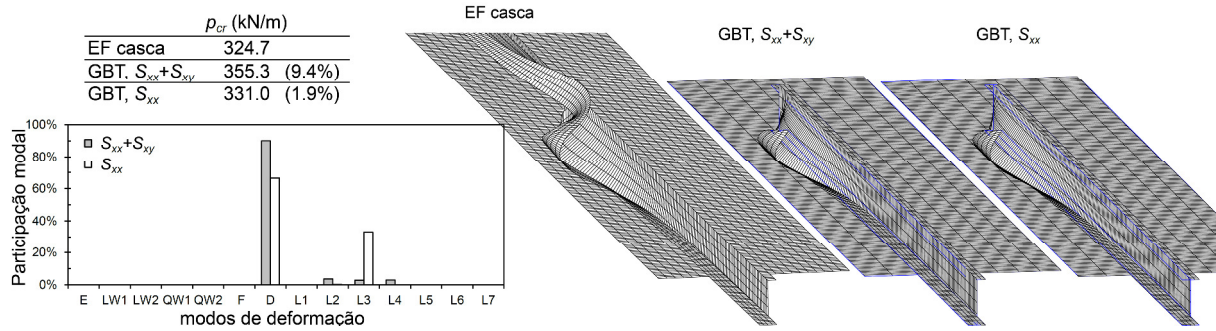


Fig. 7: Viga com variação de espessura na alma.

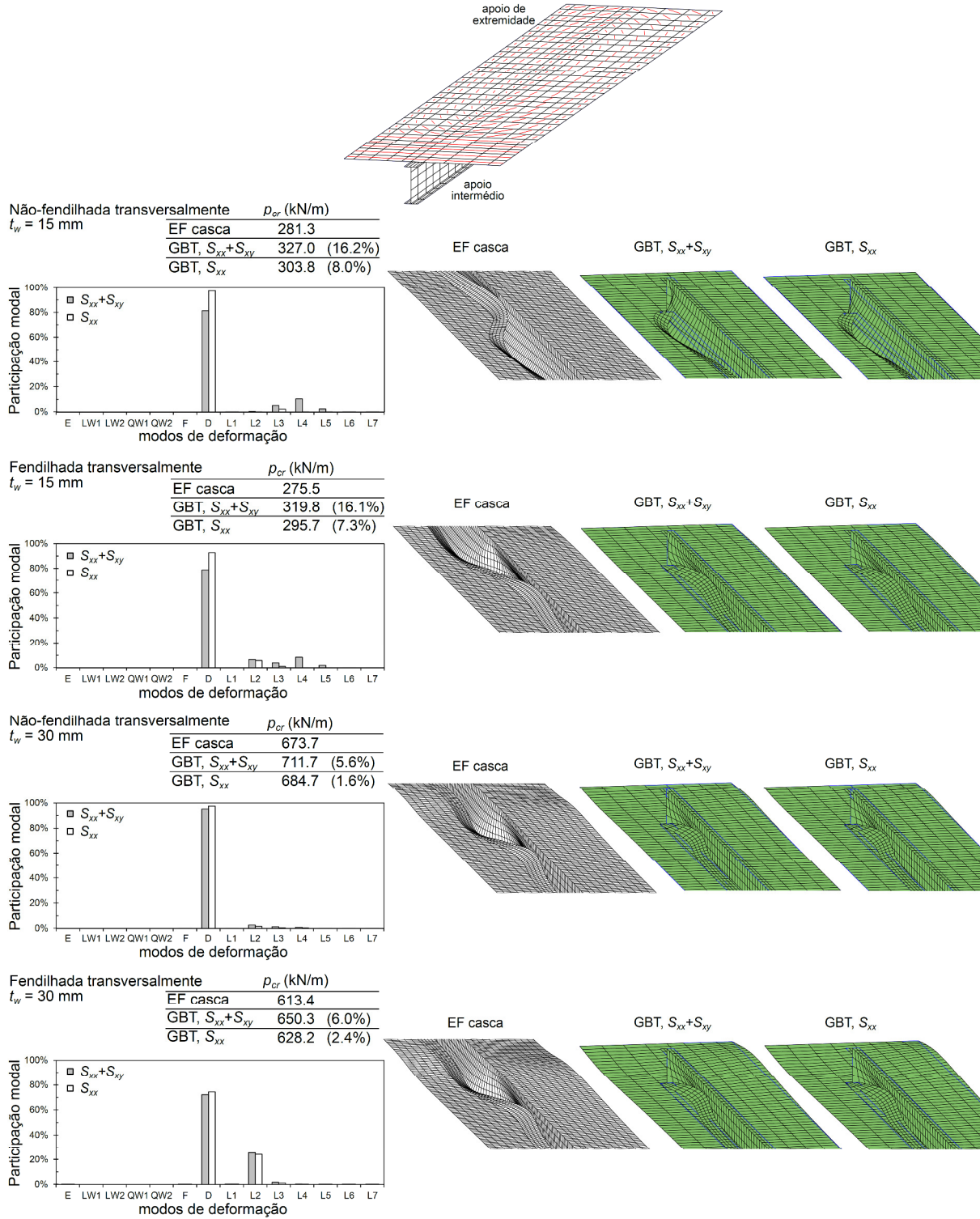
3.2.3 Análise fendilhada

Considere-se agora que a laje pode fendilhar na fase de pré-encurvadura. Em relação aos casos anteriores, o comprimento da região de momento negativo diminui e o modo de instabilidade é mais localizado, tornando o problema ainda mais complexo. A armadura é tida em conta nas análises (assume-se localizada em $z = 0$), adota-se $\beta = 0,2$ e a rigidez de flexão transversal da laje na fase de bifurcação, $D_{f_{cy}}$, é assumida fendilhada ou não-fendilhada (o primeiro caso corresponde ao prescrito pelo EC4). Nas análises com o EF proposto observou-se que é suficiente considerar 30 elementos de igual comprimento. Devido à fendilhação, a análise pré-encurvadura é realizada com iterações de Newton-Raphson – a Fig. 8, em cima, exibe o padrão de fendilhação para um dos vãos.

Para efeitos de comparação são fornecidos resultados obtidos com modelos de EF de casca (ADINA), seguindo um método aproximado para reproduzir os pressupostos adotados relativamente ao betão. Assim, utiliza-se um EF ortotrópico, com $E_{tcx} = 0$ ou E_c (se $\varepsilon_{xx}^M > 0$ ou < 0 , respetivamente) e $E_{tcy} = 12D_{f_{cy}}/h_c^3$. A armadura é tida em conta através de EF ortotrópicos, com a rigidez apropriada, sobrepostos aos EF representando o betão. Uma vez que E_{tcx} depende da extensão longitudinal, realiza-se uma análise iterativa (e demorada): no final de cada iteração, os EF de betão com $\varepsilon_{xx}^M > 0$ são identificados e o respetivo E_{tcx} é ajustado, até que nenhuma alteração significativa seja observada em iterações consecutivas.

As cargas críticas e os respetivos modos de instabilidade são exibidos na Fig. 8, juntamente com as participações modais, conduzindo às seguintes observações:

- Em relação aos resultados não-fendilhados, observa-se um ligeiro aumento das cargas críticas fornecidas pelos modelos de EF de casca (até 12%, para $t_w = 15$ mm e uma laje transversalmente não-fendilhada). Este aumento não é tão pronunciado quando a laje se encontra fendilhada transversalmente e, para $t_w = 30$ mm, obtém-se mesmo um decréscimo de 2% no valor da carga crítica.
- Os modos de instabilidade e os gráficos de participação modal mostram que a distorção desempenha um papel importante em todos os casos. Dos modos de instabilidade pode observar-se uma flexão transversal significativa para $t_w = 30$ mm.
- As cargas críticas obtidas com a GBT estão em muito bom acordo com os modelos de EF de casca, particularmente quando S_{xy} é descartado (o que está de acordo com o registado sempre que os modos envolvem distorção significativa). Observa-se ainda que as diferenças são maiores para $t_w = 15$ mm, o que pode indiciar que a deformação local na alma e/ou concentrações de tensão podem desempenhar um papel importante neste caso.
- Os diagramas de participação modal mostram que os modos locais estão presentes na maioria dos casos. Isto significa que, como no exemplo da Fig. 6, utilizar apenas o modo D não conduzirá a resultados satisfatórios.



4. Conclusão

Neste artigo foi proposto um novo EF de barra baseado na GBT, capaz de calcular, com precisão e eficiência, cargas de bifurcação de vigas mistas aço-betão. O elemento inclui apenas alguns modos de deformação (até 7 na análise de pré-encurvadura e até 15 na análise de bifurcação) e tem em conta os seguintes efeitos: *shear lag*, fendilhação do betão, distorção da

secção e deformação local (tipo placa) na alma, para além de variações discretas da espessura das paredes. Os exemplos apresentados atestam a precisão e a eficiência do EF proposto. Em particular, é possível atribuir valores independentes aos vários termos de rigidez da laje, o que permite, por exemplo, satisfazer os princípios do modelo prescrito pelo EC4 (o mesmo não é facilmente conseguido com EF de casca). Além disso, as características de decomposição modal da GBT tornam possível tirar conclusões significativas sobre a natureza dos modos de instabilidade – por exemplo, observou-se que, para além da distorção, existe uma influência significativa da deformação local (tipo placa), mesmo em almas pouco esbeltas.

Referências

- [1] EN 1994-1-1:2004. *Eurocode 4: Design of Composite Steel and Concrete Structures - Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*, Bruxelas: CEN, Bélgica, 2004.
- [2] Bradford M, Gao Z. “Distortional buckling solutions for continuous composite beams”, *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, 118(1), 73-89, 1992.
- [3] Svensson S. “Lateral buckling of beams analysed as elastically supported columns subject to varying axial force”, *Journal of Constructional Steel Research*, 5(3), 179-193, 1985.
- [4] Hanswille G. “Lateral-torsional buckling of composite beams: comparison of more accurate methods with Eurocode 4”, *Composite Construction in Steel and Concrete IV (ASCE)*, 105-116, 2002.
- [5] Schardt R. *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*, Berlim: Springer Verlag, 1989.
- [6] Camotim D, Basaglia C, Bebiano R, Gonçalves R, Silvestre N. “Latest developments in the GBT analysis of thin-walled steel structures”, *Proceedings of the International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures* (Eds.: E. Batista, P. Vellasco, L. Lima), Rio de Janeiro, Brasil, 33-58 (Vol. 1), 2010.
- [7] Camotim D, Basaglia C, Silva N, Silvestre N. “Numerical analysis of thin-walled structures using Generalised Beam Theory (GBT): Recent and future developments”, *Computational Technology Reviews*, Vol. 1, (Eds.: B. Topping et al.), Stirlingshire: Saxe-Coburg, 315-354, 2010.
- [8] Gonçalves R, Camotim D. “Steel-concrete composite bridge analysis using generalised beam theory”, *Steel and Composite Structures*, 10(3), 223-243, 2010.
- [9] Henriques D, Gonçalves R, Camotim D. “A physically non-linear GBT-based finite element for steel and steel-concrete beams including shear lag effects”, *Thin-Walled Structures*, 90, 202-215, 2015.
- [10] Henriques D, Gonçalves R, Camotim D. “GBT-based finite element to assess the buckling behavior of steel-concrete composite beams”, *Thin-Walled Structures*, 90, 202-215, 2016.
- [11] Gonçalves R, Ritto-Corrêa M, Camotim D. “A new approach to the calculation of cross-section deformation modes in the framework of Generalized Beam Theory”, *Computational Mechanics*, 46(5), 759-781, 2010.
- [12] Gonçalves R, Camotim D. “Geometrically non-linear generalised beam theory for elastoplastic thin-walled metal members”, *Thin-Walled Structures*, 51, 121-129, 2012.
- [13] MATLAB, versão 7.10.0 (R2010a), The Math Works Inc., Massachusetts, 2010.
- [14] Li Z, Schafer B. “Buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods”, *Proceedings of 20th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, St. Louis, EUA, 3-4/11, 17-31, 2010.
- [15] Bathe KJ, *ADINA System*, ADINA R&D Inc., 2012.